

COMPOSICIÓN DE ANILLOS DE COMPRESIÓN NO CIRCULARES CON COMPORTAMIENTO ÓPTIMO EN CUBIERTAS DE TENSIÓN RADIAL*

*Artículo publicado originalmente en inglés en *Archi-DOCT. The e-journal for the dissemination of doctoral research in architecture*. (2014) Vol. 2 (I), pp. 40-49. Disponible en: <<http://www.enhsa.net/archidoct/>>

Rodrigo Martín Sáiz

Profesor Asociado de Estructuras en la Escuela de Arquitectura de Reus de la Universidad Rovira i Virgili

Resumen: Las cubiertas con membranas tensadas de forma centrípeta o radial equilibran sus fuerzas internas en un anillo de compresión, normalmente con forma circular. En un estado inicial de carga, la relación entre carga y curvatura hace que el anillo esté sometido a un esfuerzo axial de valor constante y sin esfuerzos de flexión. Este es un estado óptimo para el dimensionado. La forma circular del anillo no siempre encaja con la geometría del espacio que cubre. Cuando el anillo no es circular, la tensión centrípeta uniforme produce esfuerzos axiales de valor no constante, además de importantes esfuerzos de flexión que no permiten un dimensionado óptimo. Este artículo muestra un sistema de composición de anillos y de disposición de la tensión centrípeta de la membrana, que mantiene la relación entre carga y curvatura en cada punto, para que el anillo esté sometido a un esfuerzo axial de valor constante y sin esfuerzos de flexión. Estos anillos están compuestos mediante combinaciones de arcos de circunferencia y de elipse que se pueden aproximar a diferentes formas poligonales, ofreciendo muchas posibilidades para cubrir de forma óptima espacios de planta no circular, o incluso, irregular. El proceso para generar este sistema es el siguiente: Primero se formula la forma de tensión centrípeta ideal actuando sobre una elipse, y luego se definen las formas de tangencia y combinación entre arcos de circunferencia y elipse para formar anillos cerrados que se aproximen a geometrías poligonales de cualquier tipo.

Palabras clave: Membrana, cable, cubierta tensada, anillo de compresión, elipse, optimización.

Planteamiento

Desde que se construyeron los primeros ejemplos a mediados del siglo pasado, las estructuras de radios tensados han evolucionado hasta convertirse en el tipo dominante para cubrir grandes espacios¹. Hoy en día casi nadie imagina cubrir un estadio mediante una estructura que no sea de radios tensados, combinados normalmente con membranas, porque cualquier otra solución parece ser menos eficiente, por ser más pesada.

El problema del exceso de consumo de recursos materiales en la construcción y la toma de conciencia ecológica, propició que

los precursores de estas estructuras iniciaran una suerte de revolución tecnológica que permitiera sustituir los sistemas de estructuras convencionales por otros nuevos, mucho más eficientes².

A diferencia de otros tipos de estructuras tensadas, las de radios tensados equilibran sus fuerzas internas sin necesidad de recursos externos, como anclajes en el terreno o en grandes masas de hormigón. Estas estructuras sólo precisan de un anillo de compresión perimetral para equilibrar sus fuerzas internas. Es precisamente este elemento el que concentra el mayor gasto de material de estas estructuras, por eso es el más susceptible de ser optimizado. Sin embargo, muchas de las discusiones acerca de la optimización de estas estructuras se centran en el trazado de los

¹ Se puede ver un recorrido de cinco décadas de construcción de las cubiertas con este tipo de estructuras para grandes espacios deportivos en COLUMBIA UNIVERSITY. (1995). *Housig the Spectacle. The Emergence of America's Domed Superstadiums*. Disponible en: <<http://www.columbia.edu/cu/gsap/BT/DOMES/domes.html>>.

² "We must start with scientific fundamentals, and that means with the data of experiments and not with assumed axioms predicated only upon the misleading nature of that which only superficially seems to be obvious" (APPELWHITE Y FULLER, 1975: 14).

cables tensados³, obviando el comportamiento del anillo, casi siempre circular.



Figura 1. Anillo de compresión del *Georgia Dome*, Atlanta, 1992 (de <http://www.columbia.edu/cu/gsap/BT/DOMES/domes.html>).

Este artículo forma parte de una investigación más amplia para la búsqueda de un sistema de diseño de estructuras tensadas sobre anillos planos de compresión compuestos mediante combinaciones de arcos de circunferencia y elipse⁴, en los que las condiciones para el dimensionado de su sección resistente sean óptimas, al menos en un estado inicial de carga, es decir, esfuerzo axial constante en toda su longitud y ausencia de flexiones relevantes. A esto lo llamo comportamiento inicial perfecto.

Este sistema de diseño tiene dos partes: la de composición de anillos de compresión con comportamiento inicial perfecto, basado en el principio de relación entre carga y curvatura; y la de adecuación del trazado del interior tensado para aquel estado de carga ideal que, aplicado sobre el anillo, le produce un comportamiento perfecto.

La carga sobre el anillo de compresión en una estructura tensada procede de las reacciones centrípetas que transmiten la membrana y/o

³ Ver, por ejemplo KAWAGUCHI, TATEMACHI Y SHAN CHEN (1999) y NETADOVIC (2010).

⁴ Los anillos compuestos se adaptan mejor, o sea, que se aproximan más, a las geometrías poligonales que los anillos simples circulares o, incluso, que los simples elípticos, especialmente si los polígonos no son regulares.

los cables que forman el interior tensado de la estructura. Estas reacciones tienen la dirección de la tangente al trazado de la membrana o de los cables en su entrega con el anillo. Se pueden descomponer en dos direcciones, una transversal y otra contenida en el plano del anillo. Esta última es absorbida por el anillo, permitiendo que las reacciones se equilibren dentro de la estructura. Por eso se dice que estas estructuras tensadas son autónomas.

El estado inicial de carga sobre el anillo procede de las reacciones de la membrana o los cables sometidos al pretensado, y a su peso propio, normalmente irrelevante. Como la membrana tiene contacto continuo con el anillo, la reacción sobre éste es una carga distribuida. En cambio, en una estructura de radios tensados formados por cables, las reacciones son cargas puntuales sobre el anillo. Si se despreja la flexión local surgida por la incidencia del radio tensado sobre el anillo y los cables están distribuidos con suficiente densidad, el efecto de estas cargas puntuales se asemeja mucho al de una carga distribuida. Este artículo sólo trata del diseño de los anillos sometidos a los efectos de cargas distribuidas.

Carga distribuida ideal sobre el anillo

Entonces, el estado de cargas ideal aplicado sobre el anillo en su propio plano en un estado inicial tiene que adecuarse a la curvatura del mismo, según el principio de relación entre carga Q y curvatura C . De este modo, el único esfuerzo relevante al que estará sometido será un axial de compresión N de valor constante.

$$N = \frac{Q}{C} \quad \text{ó} \quad N = Q \cdot R$$

[1a y 1b]

...donde R es el radio, inverso de la curvatura. Según esta relación, la carga Q tiene que variar en cada punto del anillo igual que lo hace la curvatura C , es decir, que si en una circunferencia con comportamiento inicial

perfecto la carga debería ser centrípeta (apuntando a un solo centro) y de valor uniforme, como su curvatura, en una elipse, cuya curvatura es variable en cada punto y cuyos radios tienen también centros distintos en cada punto, la carga Q debería ser variable en valor y dirección (centrípeta pero multicentro) en cada punto.

Para variar el valor de carga Q a lo largo del perímetro de un anillo elíptico hay dos posibilidades: La primera, si ángulo de incidencia de la membrana con el anillo en su plano transversal es igual en todo el perímetro, modificando el pretensado de la membrana para que la reacción en cada punto (x,y) coincida con la que define la ley de cargas $Q(x)$, coincidente con la función de la curvatura $C(x)$. La segunda, si el pretensado en la dirección radial es uniforme en toda la membrana, modificando el ángulo de incidencia de la membrana en el anillo en su plano transversal. Resulta interesante imaginarse, por ejemplo, cómo sería un conoide de membrana tensada inscrito en un anillo de compresión elíptico en el que, variando el ángulo de incidencia en cada punto, se hubiera adecuado el trazado hasta obtener un estado de cargas ideal en el anillo que sólo le produjera un axil constante, sin flexiones.

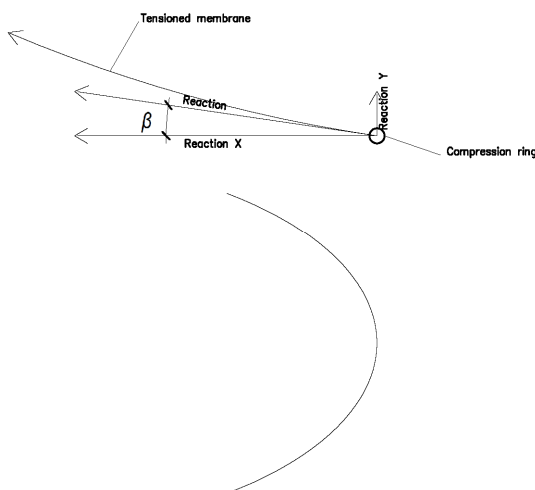


Figura 2. Descomposición de la reacción de la membrana sobre el anillo en función del ángulo de incidencia β . (del autor).

Entonces, a partir de la función curvatura $C(t)$ de una curva cualquiera⁵, formulada según,

$$C(t) = \frac{y'' \cdot x' - x'' \cdot y'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)^3}} \quad [2]$$

...se puede formular la función de carga $Q(t)$ según,

$$Q(t) = N \cdot C(t) \quad [3]$$

En el caso particular de una elipse,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad [4]$$

...substituyendo en la fórmula anterior x y x' y' x'' y'' por la función (ec. 5a), su primera y segunda derivada (ec. 5b y 5c), escrito en forma paramétrica,

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos \psi \\ y = b \cdot \text{sen} \psi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -a \cdot \text{sen} \psi \\ y' = b \cdot \cos \psi \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = -a \cdot \cos \psi \\ y'' = -b \cdot \text{sen} \psi \end{cases}$$

[5a; 5b y 5c]

...donde a y b son los semiejes mayor y menor, y ψ el ángulo o latitud reducida de un punto de la elipse, proyectado en su circunferencia principal, según se indica en la figura 3.

⁵ Función curvatura de <http://mathworld.wolfram.com/Curvature.html>.

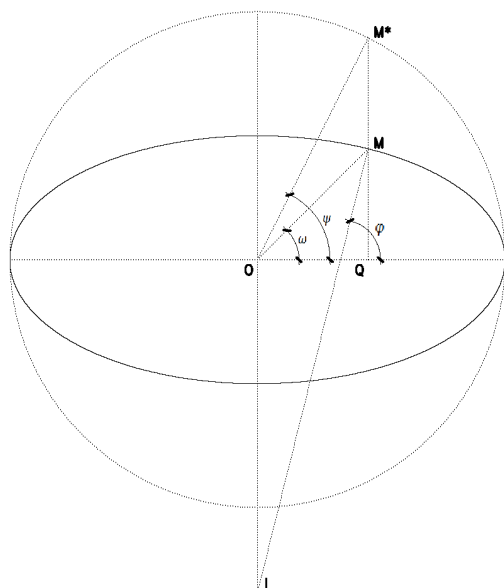


Figura 3. Latitud geocéntrica (ω), geodésica (ψ) y reducida (φ) de un punto M de la elipse⁶ (del autor).

...se obtiene la función curvatura $C(\psi)$ de la elipse, y por tanto también su función de carga⁷ $Q(\psi)$ para un valor de axil N constante.

$$C(\psi) = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 \operatorname{sen}^2 \psi + b^2 \operatorname{cos}^2 \psi)^3}}$$

y

$$Q(\psi) = \frac{Nab}{\sqrt{(a^2 \operatorname{sen}^2 \psi + b^2 \operatorname{cos}^2 \psi)^3}}$$

[6a y 6b]

Para calcular los valores máximo y mínimo de Q , basta con substituir $\psi = 90^\circ$ y $\psi = 0^\circ$ respectivamente en la ecuación 7b;

⁶ Estas latitudes sirven para situar un punto cualquiera de la elipse a partir de sistemas de referencia angular distintos. Los tres tienen el cero en la horizontal y giran en sentido contrario a las agujas del reloj. Los sistemas geocéntrico y reducido tienen un punto de origen único, situado en el cruce de los ejes principales de la elipse, que es en realidad el del sistema de coordenadas polares, en cambio, el sistema geodésico no tiene un único punto de referencia, sino que su posición varía en cada rotación de ángulo.

⁷ Formulado por el autor.

$$Q(90^\circ) = \frac{Fb}{a^2} \quad \text{y} \quad Q(0^\circ) = \frac{Fa}{b^2}$$

[7a y 7b]

Esta carga distribuida no uniforme está formada por un número infinito de vectores cuyo valor escalar se puede expresar como,

$$Q(\psi) \cdot d\psi$$

[8]

...según se formule en función de x o de ψ .

La dirección de estos vectores es la misma que la del radio de curvatura, la normal en cada punto de la elipse, o sea, el ángulo φ o latitud geodésica, y se puede calcular a partir de,

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi$$

[9]

Para calcular de una manera directa el valor del ángulo φ a partir de la ecuación de la elipse en forma cartesiana (ec. 4) es necesario encontrar primero la pendiente de la recta tangente y luego de la normal en un punto, es decir, primero su derivada en un punto (ec. 10a) y luego su inversa (ec. 10b),

$$y' = f'(x) = \pm \frac{bx}{a^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$$

...y luego

$$\frac{-1}{y'} = \frac{-1}{f'(x)} = \frac{-a^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}{\pm bx}$$

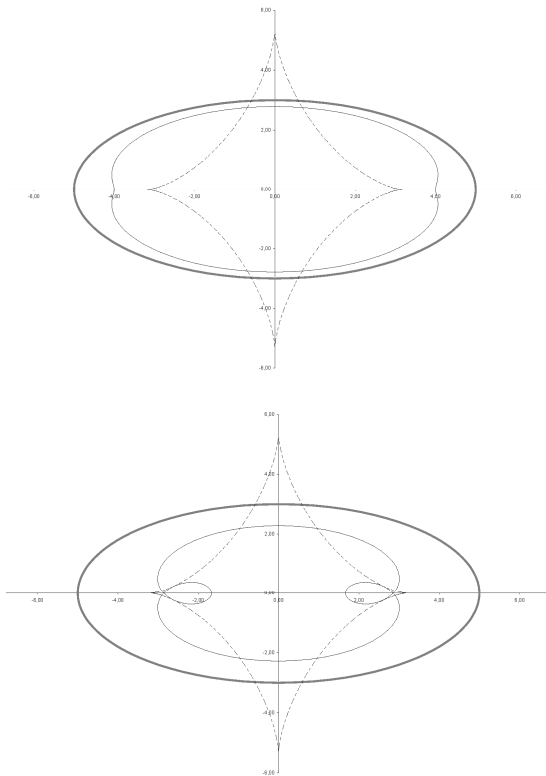
[10a y 10b]

...de la que se sabe que es igual a la tangente del ángulo que forma con la horizontal, o sea,

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{-1}{f'(x)} \right) \quad [11]$$

De ese conjunto infinito de vectores, se dibuja su contorno exterior, o sea, la línea que une todos los extremos de las flechas, se obtiene una representación gráfica de la función de carga distribuida ideal. Para encontrar las coordenadas de los puntos que forman esta gráfica, se resta el valor escalar de la carga (ec. 6b) en la dirección del vector (ec. 11) a la coordenada (x,y) de cada punto de la elipse.

Esta representación de la carga distribuida ideal sobre la elipse en función de su curvatura puede resultar engañosa, ya que se dibujan sobre la misma escala gráfica dos unidades distintas, la de longitud y la de carga, es decir, el valor de la carga se representa como una longitud según una escala gráfica que es arbitraria.



Figuras 4a y 4b. Dos elipses iguales con su evoluta⁸ y una misma ley de cargas ideal representada con dos escalas gráficas diferentes (del autor).

⁸ La evoluta es la línea que contiene todos los centros de radio de curvatura de una curva. En el caso de la elipse tiene forma de astroide y se formula,

Un anillo elíptico sometido a tal estado de cargas sufrirá únicamente una deformación en forma de acortamiento axial uniforme en todo el perímetro. Esto hará que el anillo deformado siga siendo una elipse con idénticas proporciones. Este acortamiento será mayor cuanto mayor sea el factor de carga, o menor sea su sección resistente.

Esto es relativamente fácil de comprobar construyendo un modelo de cálculo de una elipse discretizada en n segmentos según una división de la elipse en sectores con un mismo interángulo, e introduciendo en cada uno de ellos el valor promedio de carga distribuida ideal correspondiente a cada sector de la elipse. Cuanto mayor sea de la densidad y la precisión de la discretización, es decir, cuanto mejor sea la aproximación de la elipse, definida a partir de segmentos rectos, a la elipse real, menor será el valor de la flexión resultante porque menor será el error de cálculo.

Composición de anillos

Después de definir la ley de cargas ideal, ya es posible componer anillos mediante combinaciones de arcos de elipse y circunferencia, siempre y cuando estas combinaciones, que no sólo son de arcos, sino también de cargas distribuidas ideales asociadas a cada arco, cumplan la condición necesaria para que se dé un comportamiento perfecto, o sea, cuando la carga sea en cada punto función de la curvatura, o viceversa. De esta condición, y siempre que el elemento tensado sea una membrana, es decir, que la carga sobre el anillo sea distribuida, resultan curvas continuas, sin quiebros, o sea, sin cambios bruscos de trayectoria.

Para que la curvatura sea continua, es necesario que el empalme entre dos arcos sea

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}.$$

por tangencia, con coincidencia de centro y radio de curvatura en ambos arcos.

Entonces, desde un punto cualquiera de una elipse, del que se pueda calcular el ángulo geodésico φ , el radio de curvatura $R(x)$ y el centro de ese radio sobre la evoluta, se dibuja una circunferencia oscultriz⁹, tangente y de igual curvatura que la elipse en ese punto, resultando un empalme sin discontinuidad ninguna en la trayectoria de la línea. En este punto, el valor y la dirección de una carga centrípeta con un mismo factor son idénticos. También lo es el esfuerzo axial que provoca en las dos curvas, la elipse y la circunferencia, que es, al fin y al cabo, lo que permite que no hayan flexiones y, por tanto, que las condiciones de dimensionado de la sección resistente sean óptimas.

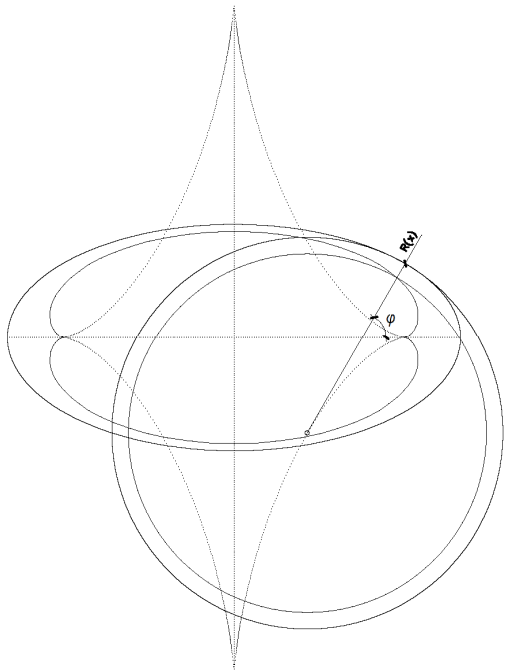


Figura 5. Tangencia entre una elipse y su circunferencia oscultriz en un punto de ángulo geodésico φ y radio de curvatura $R(x)$ (del autor).

Para componer un anillo, entonces, es necesario encadenar tramos de arco de elipse y/o circunferencia tangentes hasta formar

⁹ La circunferencia oscultriz o círculo oscilador es aquella que es tangente a la elipse en un punto y además tiene la misma curvatura. Sólo hay una circunferencia oscultriz por cada punto de la elipse. El conjunto de centros de todas las circunferencias oscultrices de una elipse se encuentra en su evoluta.

figuras cerradas, de las cuales las más simples son las formadas por dos arcos de una misma circunferencia combinados con dos arcos de una misma elipse.

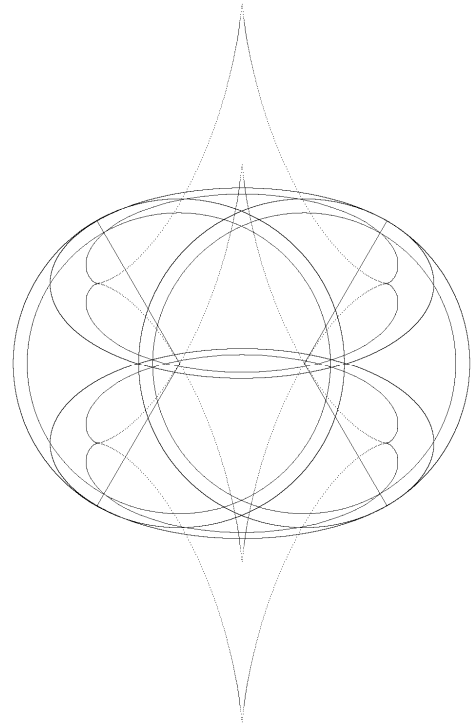


Figura 6. Composición de un anillo formado por dos arcos de una misma elipse y dos arcos de la misma circunferencia oscultriz (del autor).

Siguiendo este sistema, se pueden componer anillos que se aproximen a polígonos regulares de tres, cuatro o más lados. Cuantos más lados tenga el polígono, más se parecerá el anillo compuesto a una circunferencia, porque la distancia entre el lado del polígono y el arco del polígono se hace más pequeña cuantos más lados tenga éste.

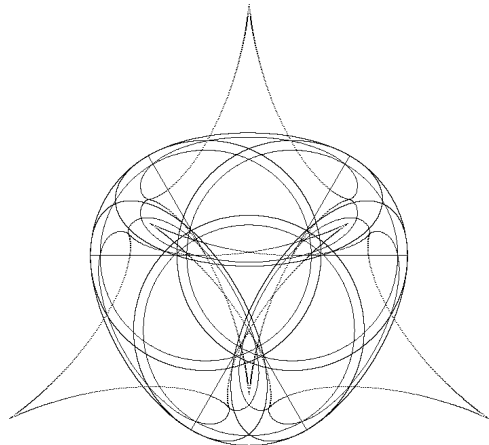


Figura 7. Composición de un anillo a partir de triángulo (del autor).

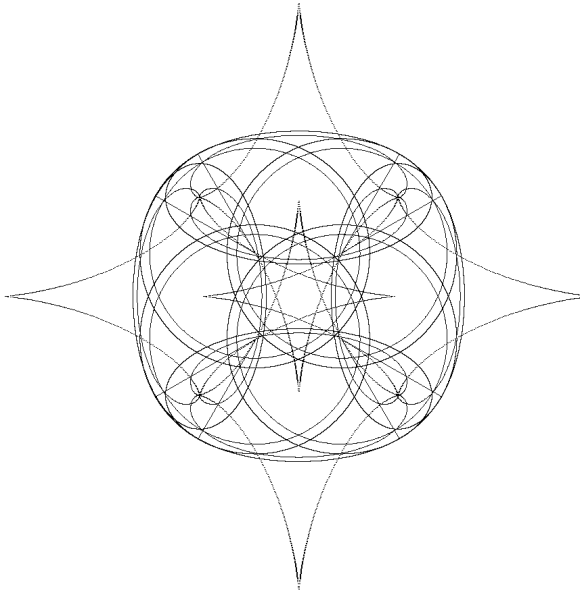
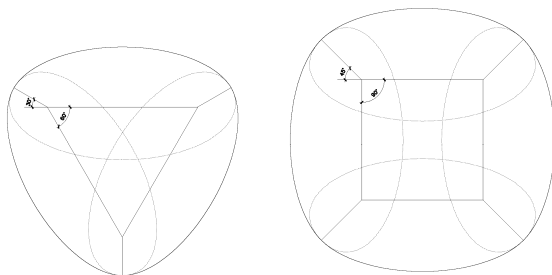


Figura 8. Composición de un anillo a partir de un cuadrado (del autor).

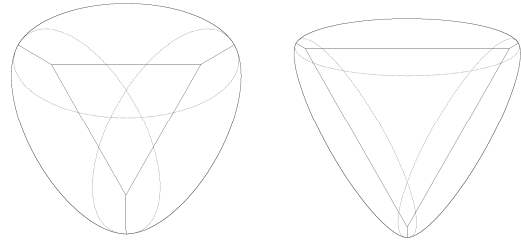
También es posible componer anillos empalmando únicamente arcos de elipse, siempre y cuando el ángulo geodésico φ de la elipse en el punto de tangencia sea igual a la mitad del ángulo α entre los lados del polígono regular al que se aproximan. Así, para anillos compuestos aproximados a un triángulo equilátero, la tangencia se realizará en $\varphi=30^\circ$, para uno aproximado a un cuadrado en $\varphi=45^\circ$, y así sucesivamente, ya que la normal a la elipse en el punto de tangencia coincide con la bisectriz del ángulo α entre los lados del polígono.

Los anillos compuestos sólo por arcos de elipse permiten una mayor aproximación al polígono, porque el radio de curvatura en el punto de tangencia, que es la distancia al vértice del polígono, es menor para una misma elipse que cuando ésta se combina con circunferencias.



Figuras 9a y 9b. Anillos compuestos únicamente por arcos elípticos, a partir de un triángulo equilátero y de un cuadrado (del autor).

Cuanto mayor sea la excentricidad de la elipse¹⁰, mayor será también la aproximación del anillo al polígono en cuestión, aunque eso supone que en los arcos de la elipse, al tener menor curvatura, al aplicar una carga centrípeta distribuida, se incrementará notablemente el esfuerzo axial.



Figuras 10a y 10b. El anillo de la derecha, tiene una mayor aproximación al triángulo que el de la izquierda, porque está formado por elipses de mayor excentricidad (del autor).

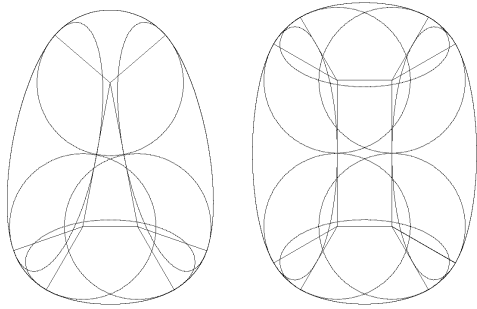
Conclusión

En el proceso hasta llegar a las reglas de composición de anillos no circulares, se han definido las condiciones óptimas para el dimensionado del anillo de compresión de estructuras de tracción centrípeta, se ha formulado la función ideal de carga-curvatura de los anillos elípticos, se han definido las condiciones de tangencia entre arcos elípticos y de circunferencia y la continuidad entre ambos de la función ideal de carga-curvatura. Después se han expuesto las reglas de composición de anillos a partir de polígonos simples y las posibles variaciones de la excentricidad entre el anillo y el polígono.

Siguiendo estas reglas de composición, es posible también construir anillos a partir de polígonos irregulares combinando arcos de diferentes circunferencias y elipses. A continuación se muestran algunos ejemplos.

¹⁰ La excentricidad de la elipse ε se refiere a la relación entre sus ejes principales, y se calcula según,

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$



Figuras 11a y 11b. Anillos compuestos a partir de a polígonos irregulares.

Esto abre la posibilidad de poder cubrir espacios de geometrías poligonales regulares y no regulares, mediante estructuras tensadas de distribución radial sin tener que renunciar a la optimización del dimensionado de su anillo perimetral.

Investigaciones futuras podrán formular las reglas que definen las relaciones entre la geometría de la membrana o los cables tensados y las reacciones en el anillo de compresión, es decir, el control de la carga sobre el anillo.

Referencias

- APPELWHITE, E. J., FULLER, R. B. (1975) *Synergetics. Explorations in the geometry thinking*. New York. Macmillan.
- COLUMBIA UNIVERSITY. (1995) *Housing the Spectacle. The Emergence of America's Domed Superstadiums*.
<<http://www.columbia.edu/cu/gsap/BT/DOMES/domes.html>> (Consultado en Sep. 2013).
- HERNÁNDEZ LÓPEZ, D. (1997) *Geodesia y Cartografía Matemática*. Valencia. Editorial Universidad Politécnica de Valencia.
- KAWAGUCHI, M., TATECHIMI, I., SHAN CHEN, P. (1999) "Optimum Shapes of Cable Dome Structure". *Engineering Structures* (21), pp. 719-725.
- NETADOVIC, A. (2010) "Development, Characteristics and Comparative Structural Analysis of Tensegrity Type Cable Domes". *SPATIUM International Review* (22), pp. 57-66.
- WOLFRAM RESEARCH. *Wolfram MathWorld*.
<<http://mathworld.wolfram.com/>> (Consultado en Nov. 2013).